-EXERCICE 26.5-

• ENONCE :

« Force électrique s'exerçant sur un demi-espace chargé »

• Le demi-espace $x \prec 0$ est vide de charges, alors que le demi-espace $x \geq 0$ est caractérisé par la densité volumique de charges : $\rho(x) = \rho_0 \exp(-x/a)$.

1) Déterminer le champ électrique dans le demi-espace $x \geq 0$.

Rq : pour répondre entièrement à la question, on pourra envisager la situation où $a \to 0$.

2) Déterminer la force électrique qui s'exerce sur un cylindre droit illimité, de base S et d'axe Ox.

• CORRIGE :

« Force électrique s'exerçant sur un demi-espace chargé »

1) • **symétries :** les plans xOz et xOy sont plans de symétrie $\Rightarrow$ le champ électrique appartient à l'intersection de ces plans $\Rightarrow$ le champ est porté par Ox.

• **invariances :** la distribution de charges étant invariante par translation selon Oy et Oz, le champ ne dépend que de la variable x ; en résumé : $\boxed{\vec{E}=E(x)\vec{e}_x}$

• l'équation de Maxwell-Gauss fournit :

$$div\vec{E}=\frac{dE_x}{dx}=\frac{\rho_0\exp(-x/a)}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_x(x)=-\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\exp(-x/a)+C$$ (où C est une cste d'intégration)

• Lorsque a tend vers zéro, la distribution **volumique réelle** de densité ρ est équivalente à une distribution **surfacique** de densité σ ; la conservation de la charge dans un **cylindre** droit illimité, d'axe Ox, de section S et dans un **disque** de même section conduit à :

$$\sigma\times S=S\times\int_0^\infty\rho_0\exp(-x/a)dx=-S\rho_0 a\times[\exp(-x/a)]_0^\infty \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sigma=\rho_0 a}$$

Rq : pour que la charge totale dans le cylindre reste constante, il faut que le produit $\rho_0 a$ **reste constant** (ainsi, dans la distribution équivalente, σ reste finie et constante).

• On connaît le champ créé par un plan illimité chargé, soit : $E_{plan}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$; il vient donc :

$$\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}=C-\lim_{a\to 0}\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\exp(-x/a)$$ (avec $\rho_0 a$ =cste) $\Rightarrow$ $\boxed{C=\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_x(x)=\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}[1/2-\exp(-x/a)]}$

2) La force électrique totale s'exerçant sur le cylindre défini dans l'énoncé se calcule par :

$$\vec{F}=\iiint_{cyl}dqE(x)\vec{e}_x=\int_0^\infty S\rho(x)E(x)dx\vec{e}_x=\int_0^\infty S\varepsilon_0\times\frac{dE(x)}{dx}\times E(x)dx\vec{e}_x=S\varepsilon_0\int_{E(o)}^{E(\infty)}E\times dE\vec{e}_x$$; d'où :

$$\vec{F}=\frac{\varepsilon_0 S}{2}[E^2(\infty)-E^2(0)]\vec{e}_x$$; or : $E(\infty)=\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}=-E(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{F}=\vec{0}}$